

Afschuiving in langs- en dwarsrichting



Ga naar www.pearsonmylab.nl voor studiemateriaal en toetsen om je begrip en kennis van dit hoofdstuk uit te breiden en te oefenen. Ook vind je daar videouitwerkingen bij verschillende opgaven uit het boek.

Doelstellingen van dit hoofdstuk

- In dit hoofdstuk ontwikkelen we een methode om de schuifspanning te vinden in een balk die een prismatische dwarsdoorsnede heeft en gemaakt is van een homogeen materiaal dat zich lineair elastisch gedraagt. De methodiek is echter alleen toepasbaar als het oppervlak van de dwarsdoorsnede een eenvoudige geometrische vorm heeft. Toch kan de methodiek op veel manieren worden toegepast bij het ontwerpen en analyseren van constructies. De begrippen schuifstroom en schuifspanning worden besproken voor balken en dunwandige onderdelen. Het hoofdstuk eindigt met een bespreking van het dwarskrachtmiddelpunt.

7.1 Afschuiving in rechte constructie-elementen

Over het algemeen zal een balk zowel dwarskrachten als momenten opnemen. De dwarskracht V is het gevolg van een schuifspanningsverdeling in de dwarsrichting die op de dwarsdoorsnede van de balk werkt. Als gevolg van de complementaire eigenschap van afschuiving zullen deze schuifspanningen ook corresponderende schuifspanningen in axiale vlakken van de balk veroorzaken, op de manier zoals is weergegeven in fig. 7.1.

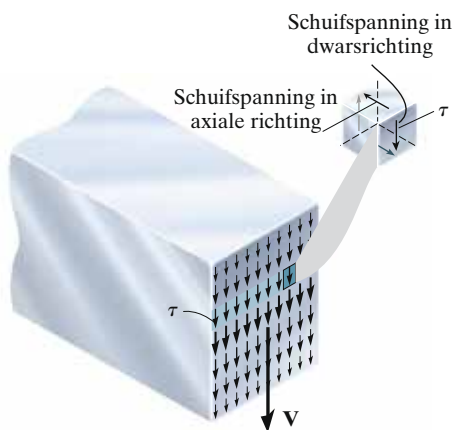


Fig. 7.1



Fig. 7.2



Afschuifverbindingsmiddelen worden met een hechtlas op de gewelfde stalen vloerplaat bevestigd. Wanneer de betonvloer gestort wordt, zorgen de deuvels ervoor dat de vloer niet kan gaan schuiven over de vloerplaat. Op die manier vormen de metalen vloerplaat en het gedroogde beton één geheel.

Om dit te effect te illustreren, bekijken we een balk die is samengesteld uit drie planken, fig. 7.2a. Als het boven- en ondervlak van elke plank glad wordt verondersteld en de planken *niet* aan elkaar gelijmd zijn, zullen de planken als gevolg van de belasting P ten opzichte van elkaar *verschuiven* als de balk doorbuigt. Als de planken echter wel op elkaar gelijmd zijn, zorgen de axiale schuifspanningen die tussen de planken optreden ervoor dat ze niet ten opzichte van elkaar kunnen verschuiven, zodat de balk zich als één geheel gedraagt (fig. 7.2b).

Als gevolg van de inwendige schuifspanningsverdeling ontstaan er hoekvervormingen; deze proberen de dwarsdoorsnede op een tamelijk ingewikkelde manier te vervormen. Bekijk bijvoorbeeld de korte staaf in fig. 7.3a waarop een raster van horizontale en verticale lijnen is aangebracht en die gemaakt is van een goed vervormbaar materiaal. Bij het aanbrengen van de dwarskracht V wordt dit raster vervormd op de manier zoals is weergegeven in fig. 7.3b. Als gevolg van deze ongelijkmatige afschuifhoekverdeling zal de dwarsdoorsnede *welven*.

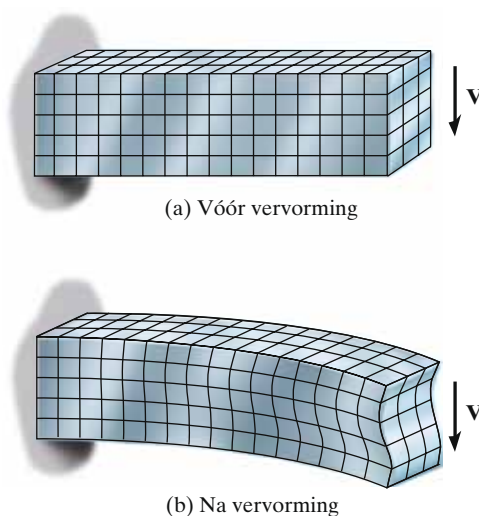
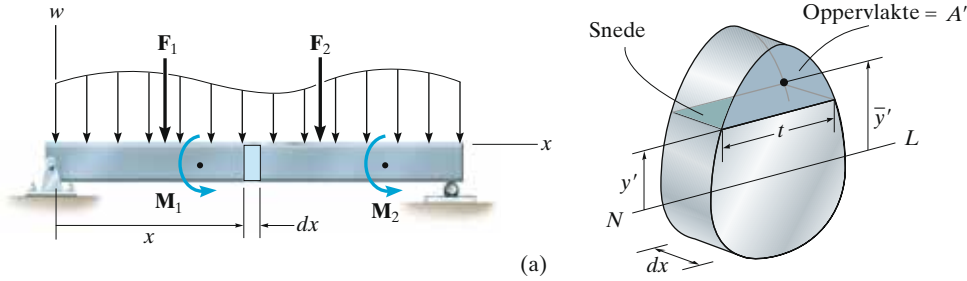


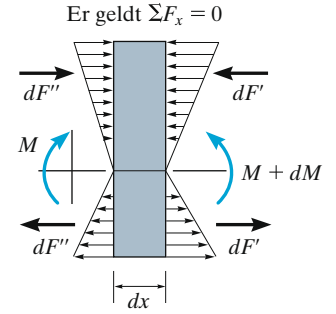
Fig. 7.3

Wanneer een balk dus belast wordt op *zowel* buiging *als* dwarskrachten, zal de dwarsdoorsnede niet vlak blijven, zoals we wel hebben aangenomen bij het afleiden van de buigingsformule. Desondanks kunnen we er in het algemeen toch van uitgaan dat de welving van de dwarsdoorsnede als gevolg van afschuiving zo klein is dat die *verwaarloosd* mag worden. In het bijzonder geldt dit als er sprake is van een *slanke balk*, waarbij de dwarsafmetingen klein zijn ten opzichte van de lengte.



7.2 De schuifspanningsformule

Omdat de rekverdeling voor dwarskrachten niet zoals bij axiale belastingen, torsie en buiging, eenvoudig kan worden gedefinieerd, zullen we de schuifspanningsformule op een indirecte manier afleiden. Daartoe bekijken we het *horizontale krachterevenwicht* van een deel van het constructie-element in fig. 7.4a. Een vrijlichaamsschema van dit *element* is weergegeven in fig. 7.4b. Deze verdeling wordt veroorzaakt door de buigmomenten M en $M + dM$. We hebben V , $V + dV$ en $q(x)$ niet getekend in het vrijlichaamsschema, omdat deze het horizontale evenwicht niet beïnvloeden. In het element in fig. 7.4b zal ΣF_x nul zijn, omdat de spanningsverdeling aan weerszijden van het element alleen een moment oplevert, waardoor de resulterende kracht nul zal zijn.



(b)
Fig. 7.4

Beschouw nu het donkergekleurde bovenste *deel* van het element op afstand y' vanaf de neutrale lijn (fig. 7.4a). Dit segment heeft een breedte t op de snede en de twee zijvlakken van de dwarsdoorsnede hebben elk een oppervlakte A' . Omdat het verschil tussen de resulterende momenten op elk zijvlak van het element dM bedraagt, kan in fig. 7.4c worden gezien dat niet voldaan is aan $\Sigma F_x = 0$, *tenzij* er een axiale schuifspanning τ op de onderzijde van het element werkt. We zullen aannemen dat deze schuifspanning *constant* is over de breedte t van de onderzijde. De spanning werkt op het oppervlak $t dx$. Als we horizontaal krachterevenwicht toepassen en de buigingsformule (vgl. 6.13) gebruiken, levert dat

$$\begin{aligned} \pm \Sigma F_x = 0; \quad \int_{A'} \sigma' dA' - \int_{A'} \sigma dA' - \tau(t dx) &= 0 \\ \int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I} \right) y dA' - \int_{A'} \left(\frac{M}{I} \right) y dA' - \tau(t dx) &= 0 \\ \left(\frac{dM}{I} \right) \int_{A'} y dA' &= \tau(t dx) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Opgelost naar τ , vinden we

$$\tau = \frac{1}{It} \left(\frac{dM}{dx} \right) \int_{A'} y dA'$$

Deze vergelijking kan worden vereenvoudigd omdat $V = dM/dx$ (vgl. 6.2). De integraal vertegenwoordigt het moment van de oppervlakte A' ten opzichte van de neutrale lijn. We zullen dit aanduiden met het symbool Q . Omdat de plaats van het zwaartepunt van de oppervlakte A' wordt bepaald met $\bar{y}' = \int_{A'} y dA' / A'$, kunnen we ook schrijven

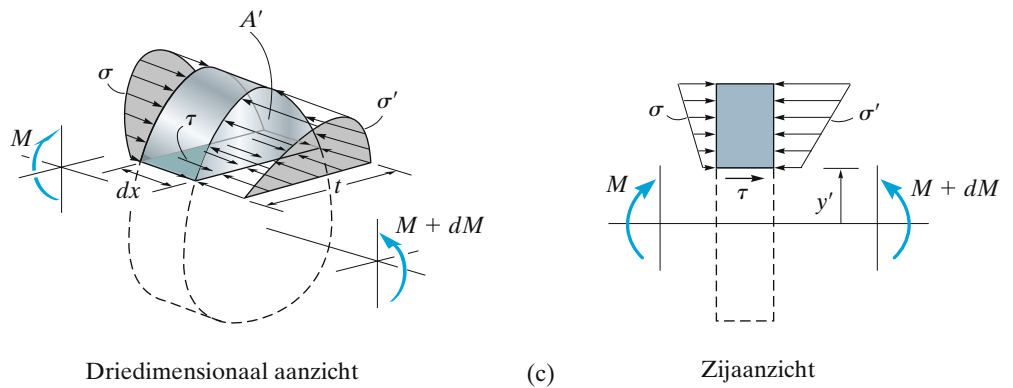


Fig. 7.4 (vervolg)

$$Q = \int_{A'} y dA' = \bar{y}' A' \quad (7.2)$$

Het uiteindelijke resultaat is dan

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad (7.3)$$

Hierin is, zoals is weergegeven in fig. 7.5:

- τ = de schuifspanning in het constructie-element in een punt op een afstand y' van de neutrale lijn. Deze spanning wordt verondersteld constant te zijn over de breedte en is daarom een *gemiddelde spanning* over de breedte t van het onderdeel
- V = de inwendige resulterende dwarskracht bepaald met behulp van de snedemethode en de evenwichtsvergelijkingen
- I = het traagheidsmoment van de *gehele* dwarsdoorsnede, berekend ten opzichte van de neutrale lijn
- t = de breedte van het oppervlak van de dwarsdoorsnede, gemeten ter plaatse waar t moet worden bepaald
- $Q = \bar{y}' A'$, waarin A' het bovenste (of onderste) deel van de dwarsdoorsnede is boven (of onder) de snede waar t wordt gemeten en $\bar{y}'$ de afstand van het zwaartepunt tot de neutrale lijn van A' is.

De bovenstaande vergelijking staat bekend als de *schuifspanningsformule*. Hoewel we in de afleiding alleen de schuifspanningen die in het langsvlak van de balk werken hebben beschouwd, kan de vergelijking ook worden ge-

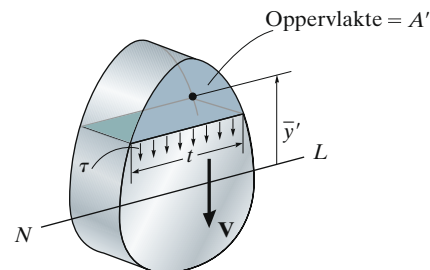


Fig. 7.5

bruikt om de schuifspanningen in de dwarsdoorsnede van de balk te bepalen. We hebben immers gezien dat deze spanningen complementair en in numeriek opzicht gelijk zijn.

Omdat we in de afleiding de buigingsformule hebben gebruikt, moet voldaan worden aan de voorwaarde dat het materiaal lineair elastisch vervormt en *dezelfde* elasticiteitsmodulus heeft voor zowel trek- als drukbelasting.

Beperkingen bij het gebruik van de schuifspanningsformule Een van de belangrijkste aannamen bij het afleiden van de schuifspanningsformule is dat de schuifspanning *gelijkmatig verdeeld* is over de *breedte* t van de doorsnede. Met andere woorden: we berekenen de *gemiddelde schuifspanning* over de breedte. We kunnen de nauwkeurigheid van deze aanname controleren door deze te vergelijken met een meer exacte analyse, gebaseerd op de elasticiteitstheorie. Als de dwarsdoorsnede van de balk bijvoorbeeld rechthoekig is, zal de schuifspanningsverdeling om de neutrale lijn, als die wordt berekend op basis van de elasticiteitstheorie, variëren op de manier zoals is weergegeven in fig. 7.6. De maximale waarde, $\tau'_{\max}$, treedt op aan de *randen* van de dwarsdoorsnede en de grootte ervan is afhankelijk van de verhouding b/h (breedte/hoogte). Voor hoge, smalle doorsneden, met bijvoorbeeld een verhouding $b/h = 0,5$, is $\tau'_{\max}$ slechts ongeveer 3% groter dan de met de schuifspanningsformule berekende schuifspanning (fig. 7.6a). Voor *liggende doorsneden*, waarbij b/h bijvoorbeeld 2 is, is $\tau'_{\max}$ echter ongeveer 40% hoger dan $\tau_{\max}$, fig. 7.6b. De afwijking wordt zelfs nog groter naarmate de doorsnede vlakker wordt, dus naarmate de verhouding b/h groter wordt. Afwijkingen van deze grootte zijn beslist ontoelaatbaar als de schuifspanningsformule wordt gebruikt om de schuifspanning in de *flens* van een balk met brede flenzen zoals in fig. 7.7 te bepalen.

Verder zal de schuifspanningsformule geen nauwkeurige resultaten opleveren als deze wordt toegepast om de schuifspanning op de overgang van het flenslijf van een balk met brede flenzen te bepalen. Hier vindt namelijk een plotselinge verandering in dwarsdoorsnede plaats, waardoor sprake is van een *spanningsconcentratie*. Gelukkig zijn deze beperkingen bij het toepassen van de schuifspanningsformule op de flenzen van een balk met brede flenzen in de praktijk niet zo belangrijk. Meestal gaat het om het berekenen van de *gemiddelde maximale schuifspanning* ter plaatse van de neutrale lijn waar de verhouding b/h (breedte/hoogte) voor de lijfplaat *erg klein* is en de berekende uitkomst dicht bij de *werkelijke* maximale schuifspanning zal liggen.

Een andere belangrijke beperking bij het toepassen van de schuifspanningsformule kan worden geïllustreerd aan de hand van fig. 7.8a, waarin een constructie-element is weergegeven met een onregelmatig gevormde of niet-rechthoekige dwarsdoorsnede. Als we de schuifspanningsformule toepassen om de (gemiddelde) schuifspanning τ langs de lijn AB te berekenen, is deze omlaag gericht zoals in fig. 7.8b is weergegeven. Maar als we een materiaal-element ter plaatse van randpunt B in fig. 7.8c bekijken is de situatie anders. Hier wordt de schuifspanning τ in het voorvlak van het element ontbonden in componenten: τ' en τ'' die respectievelijk loodrecht op en evenwijdig aan de rand werken. De component τ' moet nul zijn, omdat de bijbehorende axiale component τ' op het spanningsvrije oppervlak nul moet zijn. Om aan deze randvoorwaarde te voldoen moet de schuifspanning op dit element *tangentieel aan de rand zijn gericht*. Daardoor moet de schuifspanningsverdeling op de lijn AB zijn zoals in fig. 7.8d is weergegeven. In dit geval moeten de specifieke waarden voor de schuifspanning worden bepaald met behulp van

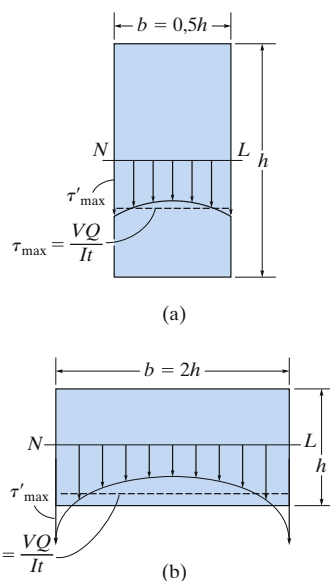


Fig. 7.6

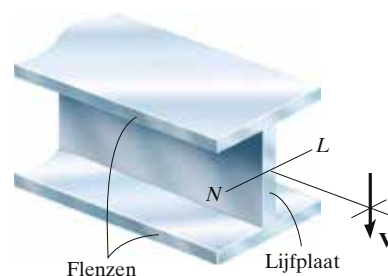


Fig. 7.7